Aufgabe 1 (*nichtkonvexe Funktionale*)
Betrachten Sie auf $W^{1,\infty}(I)$, $I = (0,1)$, die Funktionale

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u_x^2 - 1)^2\,dx \quad \text{und} \quad \mathcal{G}(u) = \int_0^1 \big((u_x^2-1)^2 + u^2\big)\,dx,$$

unter Nullrandbedingungen $u(0) = u(1) = 0$. Zeigen Sie:

(a) Beide Funktionale haben das Infimum Null. Während für F unendlich viele Minimierer existieren, nimmt G sein Infimum nicht an.

(b) Keines der beiden Funktionale ist unterhalbstetig bzgl. $u_k \to u$ gleichmäßig auf I, $u_k' \to u'$ schwach$*$ in $L^\infty(I) = L^1(I)'$.

Hinweis. Siehe auch Aufgabe 2, Serie 2.

Aufgabe 2 (*Bubbling*)
Sei $D = \{z = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |z| < 1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $W^{1,2}(D,\mathbb{S}^2) = \{u \in W^{1,2}(D,\mathbb{R}^3) : |u(z)| = 1 \text{ fast überall}\}$ unter schwacher Konvergenz in $W^{1,2}(D,\mathbb{R}^3)$ abgeschlossen ist.

(b) Begründen Sie, dass das folgende Funktional für $\lambda \in [-1,1]$ unter dieser Konvergenz unterhalbstetig ist ($\times$ bezeichnet das Kreuzprodukt):

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\int_D |Du|^2 + \lambda \int_D \langle u, \partial_1 u \times \partial_2 u\rangle.$$

(c) Finden Sie ein Gegenbeispiel zur Unterhalbstetigkeit im Fall $|\lambda| > 1$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 16. Januar vor der Vorlesung.